第16講　関数の最大・最小，方程式への応用，不定積分

§1 ▶ 関数の最大・最小

要点整理 と 公式

要点1 関数の最大値・最小値

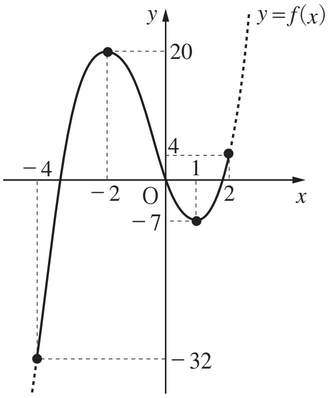
関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求める。

$f'(x) =$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = -2,\ 1$ のとき

区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-32	↗	20	↘	-7	↗	4
			極大		極小		



よって，区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における $y = f(x)$ のグラフは右図実線部分。

したがって，

$x =$ 　　で最大値

$x =$ 　　で最小値

をとる。

関数 $f(x)$ において，極大値と最大値はともに 20 で一致しているが，極小値と最小値は一致しない。

一般に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された関数の最大値，最小値は，区間の端における関数の値と極値の値を比較して求める必要がある。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

（1）$f(x)=x^3-6x^2+9x+1 \quad \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 5\right)$

（2）$y=-2x^3-6x^2+4 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

Point Pickup

関数の最大値・最小値

関数 $y=f(x)$ の最大値，最小値を求める手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)=0$ となるような実数 x を求める。この x が極値をとる x の値の候補。

③ ②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，与えられた区間における増減表をかく。

④ ③の増減表を元に，グラフをかく。

⑤ ④のグラフから最大，最小となる点をみつけ，その値を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

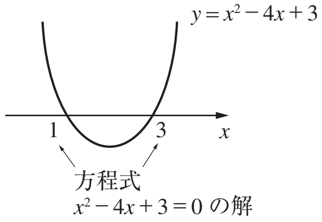
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 方程式への応用

要点整理 と 公式

要点 2 3次方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。例えば，2次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解は，2次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標で，$x=1,\ 3$ である。



方程式 $f(x)=0$ の実数解の「個数」は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の「個数」であり，その個数は $y=f(x)$ のグラフをかくことで求めることができる。

(ex) 3次方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数を求める。

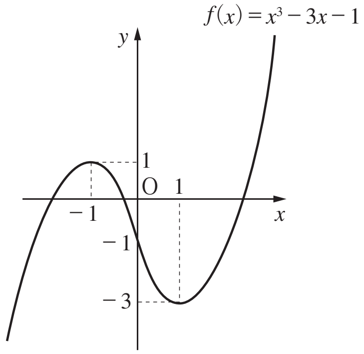
$f(x)=x^3-3x-1$ とおく。

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1,\ 1$ のとき。

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は　　個である。

ゆえに，方程式　$x^3-3x-1=0$　の異なる実数解の個数は　　個である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の3次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3 - 12x + 12 = 0$

(2)　$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(3)　$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

Point Pickup

3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数

3次方程式 $f(x) = 0$　の異なる実数解の個数

$\Longleftrightarrow$　関数 $y = f(x)$　のグラフと x 軸の共有点の個数。

関数のグラフをかいて求めることができる。

※3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は，$f(x)$ を因数分解し，方程式を解くことで求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 不定積分

要点整理 と 公式

要点❸ 不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の「　　　　　　」（または「原始関数」）という。

（ex）$(x^3)'=$　　　，　　　　$(x^3+1)'=$　　　，　　　$(x^3-2)'=$　　　より
x^3，x^3+1，x^3-2 は，いずれも　　　の不定積分である。

$f(x)$ の不定積分は無数にあり，その違いは「定数部分」だけである。
例えば，$3x^2$ の不定積分は x^3+C（C は定数）と表すことができる。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の 1 つとすると，任意の不定積分は

$$F(x)+C \qquad (C\text{ は定数})$$

とまとめて表すことができ，これを記号　$f(x)$　　（インテグラル・エフエックス・ディーエックス）で表す。

■ **不定積分**

$F'(x)=f(x)$　のとき

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \qquad (C\text{ は定数})$$

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を「　　　　」するといい，上記の定数 C を「 積分定数 」という。

以降は特に断りのない限り，C は積分定数を表すとする。

$$x^3+C \;\underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}\; 3x^2$$

$(x^3+C)'=3x^2$　　…　x^3+C を微分すると　$3x^2$　となる。

⇕　　　　　　　　　　⇕

$\int 3x^2dx=x^3+C$　　…　$3x^2$ を（x について）積分すると　x^3+C　となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

x^2 を微分すると，$(x^2)' = 2x$　である。この式の両辺を 2 で割ることにより，

$\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$　であることがわかる。したがって，

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

と表すことができる。

同様に，x^3，x をそれぞれ微分することにより，次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int x^2 dx$　　　(2)　$\int 1\,dx$

Point Pickup

不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき　　$\int f(x)dx = F(x) + C$　　$(C$ は定数$)$

微分すると $f(x)$ になる関数の 1 つを $F(x)$ とすると，その定数違いの関数である

$F(x) + C$　はすべて微分すると　$f(x)$　となる。これらをまとめて $\int f(x)dx$　と表す。

x^n の不定積分

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$　のとき

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (C\text{ は定数})$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 不定積分の計算

要点整理 と 公式

要点4 不定積分の性質と計算

一般に，不定積分の性質について次のことがいえる。

■ 不定積分の性質

k を定数とするとき

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx$
2. $\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

また，$\int 1\,dx$は $\int dx$と書くことができる。

(ex) $\int(5x^2 - 4x + 3)\,dx = \int 5x^2dx - \int 4xdx + \int 3dx$

$= 5\int x^2dx - 4\int xdx + 3\int dx$

$= 5\cdot \qquad -4\cdot \qquad +3\cdot \qquad + \qquad$ …(※)

$= \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + C$

(※)のように，積分定数 C は 1 つにまとめて書く。

また，x 以外の文字の関数についても，その不定積分を考えることができる。

例えば，　$\int tdt = \qquad + C$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$　　(2)　$\int (4t^2 - 1)\,dt$

Point Pickup

不定積分の計算

$$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

を利用し，項ごとに積分する。その際，

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

を利用して，定数を前に出した上で，

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

を用いて積分するとよい。積分定数は，項ごとではなくまとめて 1 つの C とする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　確認テスト

1　関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$ は，$x = \boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ $\left(\boxed{ア} < \boxed{イ}\right)$ で最大値 $\boxed{ウ}$，$x = \boxed{エオ}$ で最小値 $\boxed{カキク}$ をとる。

2　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$　　$\boxed{ケ}$ 個

(2)　$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$　　$\boxed{コ}$ 個

3　$\int 1 dx = x + C$，$\int x\, dx = \dfrac{1}{\boxed{サ}} x^{\boxed{シ}} + C$，$\int x^2\, dx = \dfrac{1}{\boxed{ス}} x^{\boxed{セ}} + C$（$C$ は定数）である。

4　$\int (2x^2 - 3x + 1)\, dx = \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}} x^3 - \dfrac{3}{\boxed{チ}} x^{\boxed{ツ}} + x + C$（$C$ は定数）である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

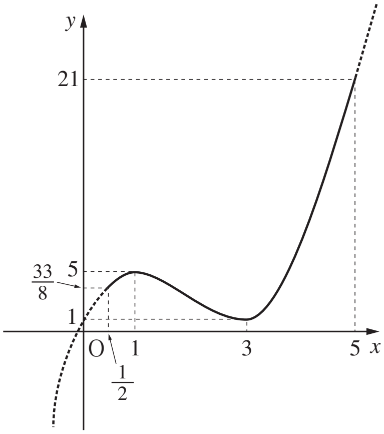
第16講　関数の最大・最小，方程式への応用，不定積分

1

(1)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$　より　$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

区間　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 5$　における増減表は以下。

x	$\frac{1}{2}$	…	1	…	3	…	5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{33}{8}$	↗	5	↘	1	↗	21



したがって，

$x = 5$　で最大値 21

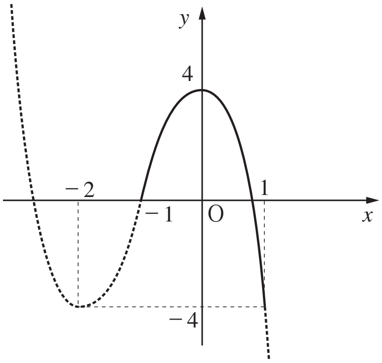
$x = 3$　で最小値 1

をとる。

(2)　$y = -2x^3 - 6x^2 + 4$　より　$f'(x) = -6x^2 - 12x = -6x(x+2)$

区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は以下。

x	−1	…	0	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	4	↘	−4



したがって，

$x = 0$　で最大値 4

$x = 1$　で最小値 −4

をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

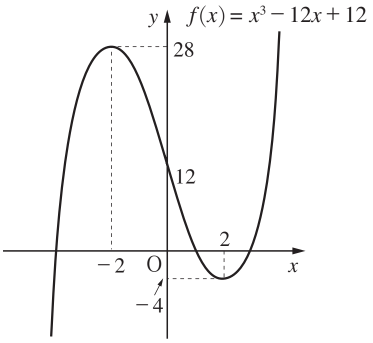
2

(1)　$f(x) = x^3 - 12x + 12$　とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗



したがって，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。

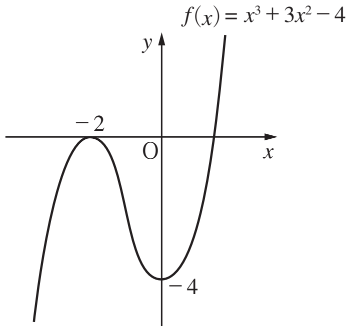
ゆえに，方程式　$x^3 - 12x + 12 = 0$　の異なる実数解の個数は 3 個である。

(2)　$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$　とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

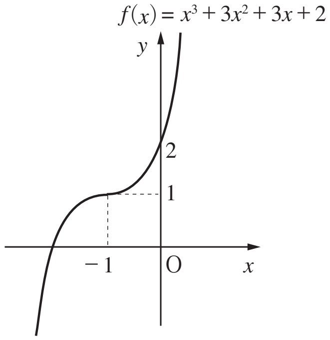
ゆえに，方程式 $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$　の異なる実数解の個数は 2 個である。

(3)　$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$　とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



したがって，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

ゆえに，方程式　$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$　の異なる実数解の個数は 1 個である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　$\left(x^3\right)' = 3x^2$　より，$\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

よって　$\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$　（Cは定数）

(2)　$(x)' = 1$　より　$\displaystyle\int 1dx = x + C$　（Cは定数）

4

(1)　$\displaystyle\int (\,3x^2 - 4x + 5\,)dx = 3\int x^2\,dx - 4\int xdx + 5\int dx$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 5\cdot x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$　（C は定数）

(2)　$\displaystyle\int (\,4t^2 - 1\,)dt = 4\int t^2dt - \int dt$

$$= 4\cdot\frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{4}{3}t^3 - t + C$$　（C は定数）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　確認テスト

1　関数 $f(x)=x^3-3x^2+5\ (-2\leqq x\leqq 3)$ は，$x=$ [ア]，[イ]（[ア] < [イ]）で最大値 [ウ]，$x=$ [エオ] で最小値 [カキク] をとる。

2　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3-6x^2+9x-3=0$　　[ケ] 個

(2)　$x^3+3x^2-9x+5=0$　　[コ] 個

3　$\int 1dx=x+C$，$\int x\,dx=\dfrac{1}{[サ]}x^{[シ]}+C$，$\int x^2\,dx=\dfrac{1}{[ス]}x^{[セ]}+C$（$C$ は定数）である。

4　$\int(2x^2-3x+1)dx=\dfrac{[ソ]}{[タ]}x^3-\dfrac{3}{[チ]}x^{[ツ]}+x+C$（$C$ は定数）である。

｛解答｝

1　ア　0　　イ　3　　ウ　5　　エ　−　　オ　2

カ　−　　キ　1　　ク　5

2　ケ　3　　コ　2

3　サ　2　　シ　2　　ス　3　　セ　3

4　ソ　2　　タ　3　　チ　2　　ツ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。